TD$_9$ – Déterminants

Exercice 1 ★

Soit x, a des réels. Parmi les familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes, indiquez lesquelles sont des bases :

$$\mathcal{B}_1 = ((1,1,1),(-1,2,0),(2,-7,-1)), \mathcal{B}_2 = ((-x,1,1),(1,-x,1),(1,1,-x)), \mathcal{B}_3 = ((1,1,1),(1,2,3),(1,4,a)).$$

Exercice 2 ★★

Pour quels valeurs de $x \in \mathbb{C}$, la matrice $A - xI_3$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ?

Exercice 3 ★★

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. Calculer les déterminants suivants (on donnera le résultat sous forme factorisée) :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & b & c \\ c & c & c \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Exercice 4 ★★

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n.

1. Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n.

Exercice 5 ★★★

Soit $a, b, c, x \in \mathbb{C}$. Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1+x \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & a \\ 1 & & 1 & a & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & \iddots & \iddots & & \vdots \\ a & 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} \quad D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 6 ★★★★

Soit $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Montrer que le déterminant suivant est nul pour tout $x \in \mathbb{K}$:

$$\begin{vmatrix} P(x) & P(x+1) & P(x+2) & \dots & P(x+n) \\ P(x+1) & P(x+2) & P(x+3) & \dots & P(x+n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(x+n) & P(x+n+1) & P(x+n+2) & \dots & P(x+2n) \end{vmatrix}$$

Exercice 7 ★★

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que l'application $u : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$ est linéaire, et déterminer sa matrice dans la base canonique. En déduire que $\det u = (\det A)^2$.

Exercice 8 ★★

Résoudre les systèmes suivants en discutant selon la valeur des paramètres (réels) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} ax+y & = & -1 \\ x+ay & = & b \end{array} \right. \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & by & + & cz & = & d \\ a^2x & + & b^2y & + & c^2z & = & d^2 \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccl} mx & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & my & + & z & + & t & = & m \\ x & + & y & + & mz & + & t & = & m+1 \end{array} \right.$$

Exercice 9 ★★

Soit $m \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois plans d'équations respectives :

$$(1-m)x - 2y + z = 0 \quad 3x - (1+m)y - 2z = 0 \quad 3x - 2y - (1+m)z = 0.$$

À quelle condition sur m ces trois plans ont-ils au moins une droite en commun ? Le cas échéant, préciser leur intersection.

Exercice 10 ★★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

1. On considère la matrice définie par blocs $\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{p,n} & I_p \end{array}\right)$, où $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

   Montrer que $\det\left(\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{p,n} & I_p \end{array}\right)\right) = \det(A)$.
2. Calculer la produit des matrices définies par blocs $\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0_{n,p} \\ \hline 0_{p,n} & B \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{p,n} & I_p \end{array}\right)$
3. En déduire que $\det\left(\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{p,n} & B \end{array}\right)\right) = \det(A)\det(B)$.
4. Application : Que vaut $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{vmatrix}$?

Exercice 11 ★★★

1. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = -I_n$. Montrer que n est pair.
2. Soit $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $C^2 + D^2 = CD$ et $CD - DC$ inversible et $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Montrer que

$$(C + jD)(C + j^2 D) = -j(CD - DC).$$

En conclure que n est un multiple de 3.

Exercice 12 ★★

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $a_{i,j} = \pm 1$. Montrer que 2^{n-1} divise $\det(A)$.

Exercice 13 ★★★★

1. Montrer que, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a $\det(\overline{M}) = \overline{\det(M)}$
2. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices qui commutent. Montrer que $\det\left(A^2 + B^2\right) \geqslant 0$.

Exercice 14 ★★★

Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ n réels strictement positifs deux-à-deux distincts.

Pour $k \in [\![1, n]\!]$ on pose $f_k : x \mapsto \cos(\lambda_k x)$ et $g_k : x \mapsto \sin(\lambda_k x)$

1. Montrer que les familles $(f_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ et $(g_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ sont libres.
2. La famille $(f_1, g_1, f_2, g_2, \cdots, f_n, g_n)$ est-elle libre ?

Exercices issus d'oraux

Exercice 15 ★★★

(Oral 2011, 2018, 2019)

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & n-2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Exercice 16 ★★★

(Oral 2012, 2013, 2017)

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} x+\lambda & y+\lambda & \cdots & y+\lambda \\ z+\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y+\lambda \\ z+\lambda & \cdots & z+\lambda & x+\lambda \end{vmatrix}$

Exercice 17 ★★★

(Oral 2013, 2017)

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $\det(M)$ en fonction de la parité de n
2. Déterminer le rang de M, une base de son noyau et de son image.

Exercice 18 ★★★

(Oral 2018)

On considère trois matrices A, B et C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $AB - BA = C$ et $CB = BC$

1. Montrer que pour tout entier naturel p, $AB^{p+1} = B^p(BA + (p+1)C)$
2. Montrer que, si $\det(B)$ et $\det(C)$ sont non-nuls alors, pour tout entier naturel p, $\det(A)\det(B) = \det(C)\det(BAC^{-1} + (p+1)I_n)$
3. En déduire que B ou C n'est pas inversible.